Systèmes linéaires et matrices triangulaires

AnaNum – Chapitre 1

I. Matrice triangulaire

But : $Ax = b$

1. Triangulaire inférieure

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & & 0 \\ \dots & \ddots & \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

a. Par ligne

$$x_i = \frac{b_i - \left(L_{i1}x_i + \cdots L_{ij}x_j + \cdots + L_{ii-1}x_{i-1}\right)}{L_{ii}}$$

```
fonction b = tri_inf(L, b)
pour i = 1 à n faire
    pour j = 1 à i – 1 faire
        b(i) = b(i) – L(i,j)*b(j)
    b(i) = b(i)/L(i,i)

pour i = 1 à n faire
    b(i) = (b(i) – L(i,1:i-1)b(1:i-1))/L(i,i)
```

b. Par colonne

2. Triangulaire supérieure

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & \dots & U_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & U_{nn} \end{pmatrix}$$

a. Par ligne

$$x_i = \frac{b_i - \left(U_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots U_{ij}x_j + \cdots + U_{in}x_n\right)}{U_{ii}}$$

```
fonction b = tri_sup(U, b)
pour i = n à 1 pas de -1 faire
    pour j = i + 1 à n faire
        b(i) = b(i) - U(i,j)*b(j)
    b(i) = b(i)/U(i,i)

pour i = n à 1 pas de -1 faire
    b(i) = (b(i) – U(i,i+1:n)b(i+1:n))/U(i,i)
```

b. Par colonne

On calcule colonne par colonne les valeurs des x_j en mettant à chaque fois à jour les b_k suivants/précédents en y soustrayant $A_{kj}x_j$.

```
fonction b = tri_inf_c(L, b)
pour j = 1 à n faire
    b(j) = b(j)/L(j,j)
    b(j+1:n) = b(j+1:n) - b(j)L(j+1:n,j)
```

```
fonction b = tri_sup_c(U, b)
pour j = n à 1 pas de -1 faire
    b(j) = b(j)/U(j,j)
    b(1:j-1) = b(1:j-1) - b(j)U(1:j-1,j)
```

c. Version matricielle par ligne

Triangulaire inférieure :

```
pour i = 1 à n faire
    b = Ni*b
```

$$N_i = I - e_i v_i^T \quad v_i^T = \left(\frac{L(i,1:i-1)}{L_{ii}}, 1 - \frac{1}{L_{ii}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i\text{ fois}}\right)$$

Triangulaire supérieure :

```
pour i = n à 1 pas de -1 faire
    b = Ni*b
```

$$N_i = I - e_i v_i^T \quad v_i^T = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1\text{ fois}}, 1 - \frac{1}{U_{ii}}, \frac{U(i,i+1:n)}{U_{ii}}\right)$$

d. Version matricielle par colonne

Triangulaire inférieure :

```
pour j = 1 à n faire
    b = Mj*b
```

$$M_j = I - \tau_j e_j^T \ \tau_j = \left(\underbrace{0; \dots; 0}_{j-1\text{ fois}}; 1 - \frac{1}{L_{jj}}; \frac{L(j+1:n,j)}{L_{jj}}\right)$$

$$x = \underbrace{M_n \dots M_1}_{L^{-1}} b = L^{-1}b$$

Triangulaire supérieure :

```
pour j = n à 1 pas de -1 faire
    b = Mj*b
```

$$M_j = I - \tau_j e_j^T \ \tau_j = \left(\frac{U(1:j-1,j)}{U_{jj}}; 1 - \frac{1}{U_{ii}}; \underbrace{0; \dots; 0}_{n-j\text{ fois}}\right)$$

$$x = \underbrace{M_n \dots M_1}_{U^{-1}} b = U^{-1}b$$

II. Matrice diagonale

$$x_i = b_i / A_{ii}$$

```
pour i = 1 à n faire
    si Aii = 0
        si bi = 0
            Infinité de solution
        sinon
            Pas de solution
    sinon
        x(i) = b(i) / A(i,i)
```